Capitolo 4

Scelta delle tecniche e mercato dei titoli in un modello stazionario con generazioni sovrapposte*

Saverio M. Fratini

Abstract
The paper deals with an overlapping generation model with production in which firms issue securities in order to finance the outlay for the costs of production. We assume there are many different commodities, and each of them can be produced by many different methods, forming alternative techniques.
Since we focus on stationary conditions, because of the non-substitution theorem, once an interest rate is given, the technique in use and the price system are determined accordingly. Since re-switching and reverse capital deepening are possible in the model we consider, then higher interest rate levels can be associated with the use of technique with a greater net product per worker – namely less labour-intensive techniques.
The main result of the paper concerns the possibility of reverse capital deepening as an equilibrium phenomenon. In the event of multiple equilibria, equilibria with a higher interest rate can be associated with a greater net output per unit of labour.

Keywords: Overlapping generations; Security market; Reverse capital deepening.

* Per i commenti e i suggerimenti ricevuti, desidero ringraziare Stefano Di Bucchianico. Non c'è bisogno che aggiunga che sono il solo responsabile per eventuali difetti ed errori rimasti nel testo.

4.1 Introduzione

Il modello di equilibrio con generazioni sovrapposte è abitualmente utilizzato per studiare il comportamento degli agenti sul mercato dei titoli[1]. Da un lato, individui che percepiscono un reddito soprattutto nella parte iniziale della loro vita cercano di raggiungere livelli di consumo ottimali attraverso la compravendita di titoli. Dall'altro, le imprese che devono acquistare gli input in periodi antecedenti rispetto a quello in cui venderanno i loro prodotti si finanziano attraverso l'emissione di titoli. Tuttavia, nella quasi totalità dei lavori esistenti su questi argomenti, il lato della produzione è descritto in modo estremamente semplificato, molto spesso ricorrendo all'ipotesi che vi sia una sola merce prodotta, impiegata sia per il consumo che come bene capitale. Questa ipotesi, come è noto, impedisce il verificarsi di alcuni fenomeni problematici riguardanti la scelta dei piani di produzione da parte delle imprese, primo tra tutti quello della 'inversione dell'intensità capitalistica' (*reverse capital deepening*)[2].

In questo scritto studieremo un modello di equilibrio stazionario con generazioni sovrapposte nel quale si suppone l'impiego di beni capitale eterogenei. Modelli di questo tipo sono stati già utilizzati per discutere questioni riguardanti la teoria del capitale[3]. Qui il nostro scopo sarà quello di mostrare non solo la possibilità del verificarsi dei fenomeni del ritorno delle tecniche e dell'inversione dell'intensità capitalistica, ma anche l'effetto che questi, influenzando l'offerta di titoli, possono avere sulle proprietà degli equilibri.

Il presente capitolo è organizzato come segue. Nel prossimo paragrafo introdurremo le principali caratteristiche del modello che inten-

---

1 Possiamo qui citare due tra i più rilevanti contributi in questa direzione: Samuelson (1958) e Diamond (1965). Inoltre, per la sua versatilità, il modello con generazioni sovrapposte è stato utilizzato per una varietà di analisi diverse, prevalentemente connesse con l'allocazione intertemporale e/o intergenerazionale dei consumi. Per una rassegna delle caratteristiche e delle potenzialità di questo tipo di modelli, rinviamo il lettore a Geanakoplos (1987).

2 Come vedremo meglio in seguito, il fenomeno dell'inversione dell'intensità capitalistica si verifica quando tassi dell'interesse più alti comportano l'adozione di piani di produzione a minore intensità di lavoro, ovvero che danno un maggiore prodotto netto per unità di lavoro.

3 Si vedano, in particolare: Fratini (2007) e (2013), Bloise e Reichlin (2009) e Petri (2022).

diamo studiare. Nei paragrafi 4.3 e 4.4 ci occuperemo, rispettivamente, delle decisioni dei consumatori e dei produttori. Nel paragrafo 4.5 analizzeremo in maggiore dettaglio il meccanismo della scelta delle tecniche in condizioni stazionarie e la possibilità del fenomeno del *re-switching*. Nel paragrafo 4.6, dopo aver scritto le condizioni di equilibrio stazionario per il modello che stiamo considerando, ci occuperemo della determinazione del livello di equilibrio del tasso dell'interesse, focalizzando l'attenzione sul mercato dei titoli. Così facendo, vedremo che l'inversione dell'intensità capitalistica può emergere come fenomeno di equilibrio: nel caso di equilibri multipli, quelli con tassi dell'interesse più elevati possono essere associati all'ottenimento di un maggiore prodotto netto a parità di lavoro impiegato. Alcune conclusioni saranno discusse nel paragrafo 4.7.

4.2 Il modello

Consideriamo una economia in cui, in ogni periodo, si producono N merci diverse, contraddistinte da numeri naturali. La merce 1 è sia un bene di consumo che un bene capitale. Le merci 2, 3, …, N sono puri beni capitale. Pertanto, in ogni periodo, c'è un solo bene di consumo.

I mercati sono aperti nell'istante iniziale di ciascun periodo e comprendono: N mercati delle merci; il mercato del lavoro; il mercato dei titoli. Quindi, in tutto, ci sono $N + 2$ mercati aperti in ogni periodo.

Un titolo è un asset finanziario che, a fronte del pagamento a pronti di 1 unità della merce numerario, concede al possessore il diritto di ricevere $(1 + r)$ unità della merce numerario consegnata alla data successiva[4]. I titoli sono emessi dalle imprese allo scopo di finanziare l'acquisto dei beni capitale e il pagamento dei salari in un periodo antecedente rispetto a quello in cui si otterrà l'output e sarà, quindi, possibile venderlo. La domanda di titoli proviene dai risparmiatori, che desiderano spostare parte della loro capacità di spesa corrente sui mercati che saranno aperti nel periodo successivo.

[4] Nella logica neo-walrasiana, in cui le merci si distinguono anche per data di consegna, il fattore d'interesse $(1 + r)$ è il prezzo relativo della merce numerario consegnata alla data t in termini della merce numerario consegnata alla data $t + 1$. Ovvero, in altri termini, è la quantità di merce numerario consegnata alla data $t + 1$. che si riceve in cambio di 1 unità della merce numerario consegnata alla data t.

Il modello presenta le caratteristiche della stazionarietà e della ricorsività. All'inizio di ciascun periodo gli agenti dispongono sempre delle stesse informazioni, hanno le stesse funzioni obiettivo e, quindi, prendono sempre le stesse decisioni. Non c'è crescita demografica, non c'è accumulazione (netta) di capitale, non c'è progresso tecnico, né cambiamento delle preferenze dei consumatori.

Ad ogni data nascono $\bar{L}$ individui identici che vivono per due periodi: la giovinezza e la vecchiaia. Alla nascita, ciascun individuo dispone esclusivamente di 1 unità di lavoro da svolgere durante la giovinezza. Quindi, al fine di consumare anche durante la vecchiaia, i giovani individui devono risparmiare una parte del loro salario e acquistare titoli.

La tecnologia di produzione è di tipo Leontief. Per ciascuna merce i, con $i = 1, 2, \ldots, N$, ci sono m_i metodi diversi di produzione, con $m_i \in \mathbb{N}$. Prendendo un metodo per ciascuna merce, questo gruppo di N metodi forma una tecnica. Indichiamo con Θ l'insieme di tutte le tecniche che si possono comporre prendendo i metodi disponibili ($\#\Theta = \prod_{i=1}^{N} m_i$), quest'insieme è ciò che viene chiamato il 'book of blue-prints'.

Per una generica tecnica $\theta \in \Theta$, la matrice $A(\theta)$, di dimensione $N \times N$, e il vettore $L(\theta)$, $N \times 1$, contengono i coefficienti unitari di produ-zione delle N merci. In particolare, i coefficienti $a_{ij}(\theta)$ e $\ell_i(\theta)$ esprimo-no gli impieghi di merce j e di lavoro per la produzione di una unità di merce i, con i e $j = 1, 2, \ldots, N$. Pertanto, indicando con $Q_\theta \in \mathbb{R}_+^N$ il vettore delle produzioni lorde delle N merci, abbiamo che esso richiede un impiego di beni capitale $Q_\theta^T \cdot A(\theta) = X_\theta$ e di lavoro $Q_\theta^T \cdot L(\theta) = L_\theta$[5].

In generale, all'inizio di ogni periodo t, un vettore di output lordi Q emerge come conseguenza dell'impiego di un vettore di beni capitale X^I e di una quantità di lavoro L nel periodo precedente, $t-1$. Il vettore delle produzioni lorde Q contiene un vettore di beni capitale X^O e una quantità Y di merce 1 destinata al consumo. Ovvero, sia e_1 il vettore che ha 1 nella prima posizione e 0 in tutte le altre, abbiamo:

$$X^I \oplus L \to Q$$
$$Q = X^O + Y \cdot e_1$$

[5] In generale, per vettore intendiamo un vettore colonna. L'apice T indica un vettore trasposto, e quindi un vettore riga.

Inoltre, visto che il modello è stazionario, il vettore dei beni capitale impiegati come input è uguale a quello dei beni capitale prodotti come output: $X^I = X^O$.

4.3 Il lato del consumo

Indicando con p il vettore dei prezzi delle N merci, con w il saggio del salario e con r il tasso dell'interesse sui titoli, un sistema dei prezzi è una terna $(p, w, r) \in \mathbb{R}_+^{N+2}$. Per un dato sistema dei prezzi, ciascun individuo sceglie il proprio piano di consumo $(c_g, c_v) \in \mathbb{R}_+^2$ – in cui c_g è il consumo di merce 1 durante la giovinezza e c_v durante la vecchiaia[6] – in modo da massimizzare una funzione di utilità $u = u(c_g, c_v)$, con le usuali proprietà, rispettando il vincolo di bilancio.

Per quanto riguarda quest'ultimo, l'intera capacità di spesa dell'individuo deriva dal salario w ottenuto dalla cessione di 1 unità di lavoro durante la giovane età. Di conseguenza, una parte del salario sarà spesa per l'acquisto di merce 1 da consumare in gioventù, e la parte rimanente verrà utilizzata per acquistare titoli emessi dalle imprese. Visto che i titoli fruttano un tasso d'interesse r, la quantità di titoli (numerario corrente) che occorre acquistare per consumare una unità di bene 1 alla data successiva è $p_1/(1 + r)$. Pertanto, il vincolo di bilancio intertemporale è:

$$p_1 \cdot c_g + \frac{1}{(1+r)} p_1 \cdot c_v \leq w \tag{4.1}$$

Dalla soluzione del problema di massimizzazione dell'utilità, con i prezzi considerati parametricamente, si può ottenere la funzione di domanda individuale del bene di consumo nella giovane età e nella vecchiaia:

$$c_g = c_g(p, w, r) \tag{4.2}$$

$$c_v = c_v(p, w, r) \tag{4.3}$$

[6] Ricordiamo che, per semplicità, stiamo assumendo che la merce 1 sia l'unico bene di consumo.

Dato che in ogni periodo ci sono $\bar{L}$ individui di ciascuna età, la funzione di domanda di mercato della merce 1 come bene di consumo è:

$$C(p,w,r) \equiv \bar{L} \cdot \left[c_g(p,w,r) + c_v(p,w,r)\right] \tag{4.4}$$

Infine, in ciascun periodo, la domanda di titoli corrisponde all'ammontare dei risparmi dei giovani, ovvero:

$$S(p,w,r) \equiv \bar{L} \cdot \left[w - c_g(p,w,r) \cdot p_1\right] \tag{4.5}$$

4.4 Il lato della produzione

Per un dato sistema dei prezzi $(p,w,r) \in \mathbb{R}_+^{N+2}$, ciascuna impresa decide il proprio piano di produzione con lo scopo di massimizzare il profitto, ovvero la differenza tra ricavi e costi. Con riferimento a quest'ultimi, siccome la produzione di merci disponibili nel periodo t richiede l'impiego di beni capitale e lavoro nel periodo $t-1$, l'esborso per l'acquisto dei beni capitale e per i salari avviene in un periodo antecedente rispetto a quello in cui emerge l'output, e quindi i ricavi. Di conseguenza, all'interno dei costi, occorre includere anche gli interessi sui titoli che le imprese hanno emesso, nel periodo precedente, per finanziare detto esborso.

Inoltre, siccome stiamo assumendo una tecnologia di tipo Leontief, e quindi con rendimenti costanti di scala, qualora il sistema dei prezzi consentisse di realizzare – almeno in qualche settore – profitti strettamente positivi, il problema della massimizzazione dei profitti non ammetterebbe soluzione[7]. Dobbiamo quindi restringere l'insieme dei possibili sistemi dei prezzi, tenendo conto solo di quelli compatibili con la massimizzazione del profitto da parte delle imprese. D'altra parte, sistemi dei prezzi per i quali i piani di produzione da parte delle imprese sono indeterminati risultano sicuramente incompatibili con l'equilibrio. Così, prendiamo la merce 1 come numerario ed escludiamo tutti i sistemi

[7] Se, dato il sistema dei prezzi, nel settore della merce i si realizzano, con l'uso di un certo metodo, profitti strettamente positivi alla scala unitaria, allora l'ammontare dei profitti, in questo settore, sarà una funzione monotona crescente della quantità prodotta. Pertanto, non esiste un piano di produzione che massimizza i profitti.

dei prezzi che, con almeno una tecnica, comportano profitti strettamente positivi alla scala unitaria. Ovvero:

$$e_1^T \cdot p = 1 \tag{4.6}$$

$$p \leqq (1+r) \cdot [A(\theta) \cdot p + L(\theta) \cdot w]; \forall \theta \in \Theta \tag{4.7}$$

Sia (p, w, r) un sistema dei prezzi che soddisfa la condizione (4.7), i metodi inclusi nella tecnica $\theta^* \in \Theta$ massimizzano i profitti a questi prezzi se e solo se essi comportano profitti nulli alla scala unitaria, cioè:

$$p = (1+r) \cdot [A(\theta^*) \cdot p + L(\theta^*) \cdot w] \tag{4.8}$$

Teorema 1 (teorema di non sostituzione)

Per ogni tasso dell'interesse $r \in [0, R]$, c'è un vettore di prezzi $p(r) \in \mathbb{R}_+^N$, un saggio del salario $w(r) \in \mathbb{R}_+$ e un insieme non vuoto di tecniche $\theta(r) \subset \Theta$ tali che

$$e_1^T \cdot p(r) = 1 \tag{4.9}$$

$$p(r) \leqq (1+r) \cdot [A(\theta) \cdot p(r) + L(\theta) \cdot w(r)]; \forall \theta \in \Theta \tag{4.10}$$

$$p(r) = (1+r) \cdot [A(\theta) \cdot p(r) + L(\theta) \cdot w(r)]; \forall \theta \in \theta(r) \tag{4.11}$$

Dimostrazione: Levhari (1965, pp. 99-102).

Il teorema di non sostituzione[8] ci dice che per ogni tasso dell'interesse compreso tra 0 e un certo massimo R[9], esiste un insieme $\theta(r)$ che comprende tutte le tecniche che massimizzano i profitti al sistema dei prezzi $[p(r), w(r), r] \in \mathbb{R}_+^{N+2}$. Vedremo nel prossimo paragrafo che la corrispondenza $\theta(r)$ è, in generale, quasi ovunque *single-valued*, tranne che per isolati livelli del tasso dell'interesse, che corrispondono a dei punti di *switch* tra le tecniche.

---

[8] Si veda Salvadori (1987) per una rassegna sul teorema di non sostituzione.

[9] Il tasso dell'interesse R rappresenta il livello massimo compatibile con il pagamento di un salario non negativo senza incorrere in perdite. Ovvero: $w(r) \geq 0 \ \forall r \in [0, R]$.

Indicando, come in precedenza, con $Q_\theta \in \mathbb{R}_+^N$ il vettore delle quantità prodotte con la tecnica θ, abbiamo che Q_θ sarà il vettore nullo $\forall\theta \notin \theta(r)$, mentre $Q_\theta \geqq 0\ \ \forall\theta \in \theta(r)$. Possiamo quindi determinare la produzione complessiva di merci $Q \in \mathbb{R}_+^N$ come la somma delle quantità prodotte attraverso l'uso delle tecniche che massimizzano i profitti: $Q = \sum_{\theta\in\theta(r)} Q_\theta$. L'ottenimento di questo vettore di quantità prodotte com-porterà un impego complessivo di lavoro $L = \sum_{\theta\in\theta(r)} Q_\theta^T \cdot L(\theta)$ e un impiego di beni capitale $X^T = \sum_{\theta\in\theta(r)} Q_\theta^T \cdot A(\theta)$.

Siano X e L l'impiego complessivo di beni capitale e di lavoro da parte delle imprese, l'esborso che, all'inizio di ogni periodo, le imprese devono finanziare tramite l'emissione di titoli sarà pari a $V = X^T \cdot p + L \cdot w$.

4.5 La scelta delle tecniche

In questo paragrafo affronteremo lo studio della scelta delle tecniche da parte delle imprese attraverso lo strumento delle curve salario. Per costruire la curva salario associata a una tecnica, cominciamo col supporre che l'utilizzo di una generica tecnica $\theta \in \Theta$ comporti profitti nulli. Ovvero:

$$p = (1 + r) \cdot [A(\theta) \cdot p + L(\theta) \cdot w] \tag{4.12}$$

Ora, continuando ad adottare la merce 1 come numerario, ovvero continuando ad imporre l'equazione (4.6), il sistema formato da questa e dalla (4.12) può essere risolto per esprimere il vettore dei prezzi p e il saggio del salario w come delle funzioni del tasso dell'interesse r e della tecnica θ. Tali funzioni ci dicono quali prezzi e quale saggio del salario consentono alla tecnica θ di realizzare profitti nulli quando il tasso dell'interesse è r. In particolare, avremo:

$$(\theta, r) \equiv \frac{[I-(1+r)\cdot A(\theta)]^{-1}\cdot L(\theta)}{e_1^T\cdot[I-(1+r)\cdot A(\theta)]^{-1}\cdot L(\theta)} \tag{4.13}$$

$$w(\theta, r) \equiv \frac{1}{(1+r)\cdot e_1^T\cdot[I-(1+r)\cdot A(\theta)]^{-1}\cdot L(\theta)} \tag{4.14}$$

La curva salario associata all'uso di una tecnica θ è il grafico della funzione $w = w(\theta, r)$ al variare di *r*. Le proprietà di questa funzione sono note. Primo, essa è di una funzione monotona decrescente di r[10]. Secondo, quando il tasso dell'interesse è 0, il saggio del salario è pari al prodotto netto per unità di lavoro nel settore integrato della merce 1, ovvero: $w(\theta, 0) \equiv y(\theta)$[11]. Infine, si dimostra il seguente teorema.

Teorema 2

Per ogni tasso dell'interesse $r \in [0, R]$, sia $\theta^* \in \Theta$ una tecnica tale che $w(\theta^*, r) \geq w(\theta, r)\ \forall\theta \in \Theta$, allora l'utilizzo dei metodi inclusi nella tecnica θ^* comporta la massimizzazione dei profitti al sistema dei prezzi $[p(\theta^*, r), w(\theta^*, r), r]$.

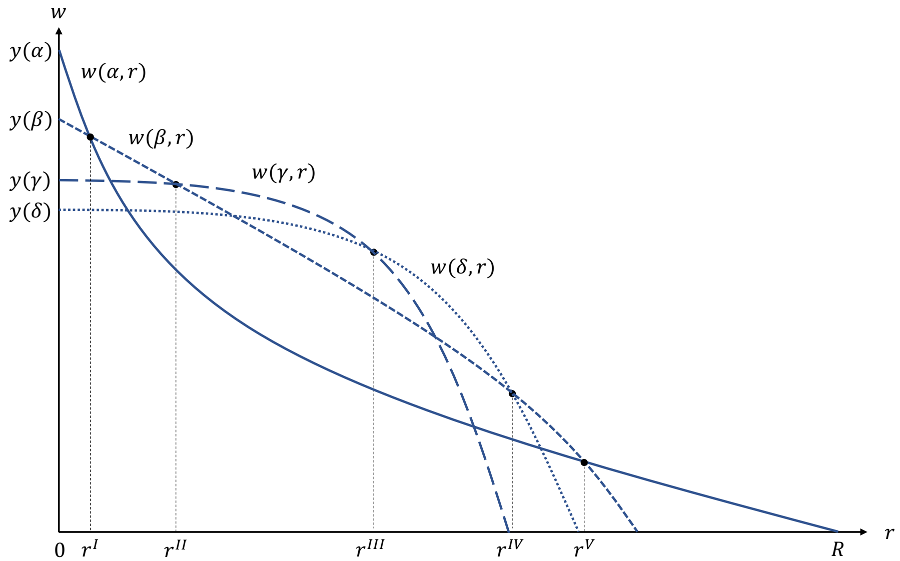
Dimostrazione: Kurz e Salvadori (1995), p. 143[12].

[10] L'andamento decrescente della funzione $w = w(\theta, r)$, una volta fissata la tecnica e con $r \in [0, R]$, può essere dimostrato intuitivamente osservando che $[I - (1 + r) \cdot A(\theta)]^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty}[(1 + r) \cdot A(\theta)]^t$ (cf. Kurz e Salvadori 1995, p. 513). Ciò, infatti, com-porta che, nella (14.15), il denominatore del rapporto aumenti al crescere di r.

[11] Un settore verticalmente integrato è un settore in grado di produrre al suo interno tutti i beni capitali che esso impiega. Ora, per una tecnica $\theta \in \Theta$, consideriamo il settore verticalmente integrato il cui output netto consiste di merce 1 e indichiamo con y il suo prodotto netto per unità di lavoro. Questa quantità può essere determinata risolvendo le seguenti equazioni: $q_\theta^T = e_1^T \cdot y + q_\theta^T \cdot A(\theta)$ e $q_\theta^T \cdot L(\theta) = 1$, dove il vettore q_θ rappresenta l'output lordo per unità di lavoro nel settore integrato. Quindi:
$y(\theta) \equiv 1/e_1^T \cdot [I - A(\theta)]^{-1} \cdot L(\theta)$, da cui: $y(\theta) \equiv w(\theta, 0)$.

[12] Questa dimostrazione è riferita al caso con salari posticipati, ma la sua estensione al caso con salari anticipati non sembra comportare difficoltà. Infatti, come sappiamo (cf. Petri 2021, p. 113), dato il tasso *r*, c'è una corrispondenza uno a uno tra il salario posticipato w_p e il nostro w: $w_p = (1 + r) \cdot w$. Di conseguenza, per ogni r, abbiamo che $w_p(\theta^*, r) > w_p(\theta, r)$ se e solo se $w(\theta^*, r) > w(\theta, r)$.

Figura 4.1
Le curve salario



Consideriamo, ad esempio, il caso in cui l'insieme delle tecniche disponibili comprende solo quattro elementi, cioè: $\Theta \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Possiamo tracciare, come nella figura 4.1, le curve salario associate all'uso delle quattro tecniche. Osservando la figura è possibile individuare la tecnica ottimale – ovvero quella che comprende i metodi che massimizzano i profitti – per ogni livello del tasso dell'interesse $r \in [0, R]$. In particolare, inizialmente, per $r \in [0, r^I]$, la tecnica α è quella ottimale. Poi, per $r \in [r^I, r^{II}]$, la tecnica β diventa ottimale. Il livello del tasso dell'interesse r^I rappresenta pertanto un punto di *switch* (cambiamento) tra le due tecniche. In tutto, nell'esempio della figura 1, ci sono cinque punti di *switch*.

L'esempio mostra anche la possibilità del fenomeno del *re-switching* o 'ritorno delle tecniche'. Il *re-switching* si verifica quando la stessa tecnica risulta ottimale per due intervalli disgiunti del tasso dell'interesse, ma non per un intervallo compreso tra di essi. Questo è il caso delle tecniche α e β, in quanto la prima è ottimale per $r \in [0, r^I]$ e $[r^V, R]$, mentre la seconda per $r \in [r^I, r^{II}]$ e $[r^{IV}, r^V]$.

La manifestazione del fenomeno del *re-switching* è condizione sufficiente – sebbene non necessaria – affinché si verifichi quello che viene chiamato *backward switch*, ovvero il *reverse capital deepening*. Secondo Robinson e Naqvi (1967, p. 580), un cambiamento della tecnica è *forward* se un aumento del tasso dell'interesse conduce all'adozione di una tecnica a maggiore intensità di lavoro, cioè una tecnica che comporta un minore prodotto netto per unità di lavoro y. Di contro, il cambiamento è un *backward switch* nel caso opposto. Così, tornando alla figura 4.1, possiamo notare che i tassi dell'interesse r^I, r^{II} e r^{III} corrispondono a dei *forward switch*, poiché $y(\alpha) > y(\beta) > y(\gamma) > y(\delta)$. Viceversa, r^{IV} e r^V sono dei punti di *backward switch*, infatti $y(\delta) < y(\beta) < y(\alpha)$. Come fu argomentato durante il dibattito degli anni '60, la possibilità di punti di *backward switch* è inconciliabile con l'idea marginalista della sostituibilità tra fattori. Più avanti, nel paragrafo 4.6, mostreremo che essa può comportare problemi anche all'interno dell'approccio neo-walrasiano che stiamo adottando in questo saggio.

Una voltra tracciate le curve salario per tutte le tecniche appartenenti all'insieme Θ, il loro inviluppo esterno è la frontiera salario-interesse (o frontiera del prezzo dei fattori). Tale curva è il grafico della funzione $w = w(r)$, che esprime il massimo saggio del salario che può essere pagato – senza perdite – quando il tasso dell'interesse è r. Cioè:

$$w(r) \equiv \max_{\theta \in \Theta} w(\theta, r) \tag{4.15}$$

Inoltre, una volta ottenuta la funzione $w(r)$, la corrispondenza $\theta(r) \subset \Theta$ può essere definita come segue:

$$\theta(r) \equiv \{\theta \in \Theta : w(\theta, r) = w(r)\} \tag{4.16}$$

A questo punto, tornando alla figura 4.1, è possibile rendersi conto che, in generale, la corrispondenza $\theta(r)$ è quasi ovunque *single-valued* sul dominio $[0, R]$. Essa risulta *set-valued* solo in corrispondenza dei cinque punti di *switch*, nei quali due tecniche sono ottimali per lo stesso sistema dei prezzi[13].

[13] Risulta abbastanza intuitivo che, in generale, i punti di *switch* sono punti isolati. Infatti, la coincidenza per un tratto (o anche solo la tangenza) delle curve salario di due tecniche diverse può essere ottenuta solo tramite una scelta *ad hoc* dei coefficienti tecnici. Lo stesso vale per l'intersezione delle curve salario di *tre* tecniche in un stesso punti

4.6 Gli equilibri stazionari

Una volta ottenute le funzioni $C(p,w,r)$, $S(p,w,r)$, $p(r)$, $w(r)$ e la corrispondenza $\theta(r)$, possiamo affermare che un sistema dei prezzi $(p,w,r) \in \mathbb{R}_+^{N+2}$ rappresenta un equilibrio per l'economia che stiamo considerando se e solo se[14]:

$$C(p,w,r) \cdot e_1^T + \sum_{\theta \in \theta(r)} Q_\theta^T \cdot A(\theta) = \sum_{\theta \in \theta(r)} Q_\theta^T \tag{4.17}$$

$$\sum_{\theta \in \theta(r)} Q_\theta^T \cdot L(\theta) = \bar{L} \tag{4.18}$$

$$S(p,w,r) = \sum_{\theta \in \theta(r)} Q_\theta^T \cdot A(\theta) \cdot p + \sum_{\theta \in \theta(r)} Q_\theta^T \cdot L(\theta) \cdot w \tag{4.19}$$

$$p = p(r) \tag{4.20}$$

$$w = w(r) \tag{4.21}$$

Infatti, le equazioni (4.17)-(4.19) esprimono le condizioni di *market-clearing* sui mercati, rispettivamente, delle merci, del lavoro e dei titoli – con la domanda sul lato di sinistra e l'offerta su quello di destra. Le equazioni (4.20)-(4.21) ci dicono che prezzi e salario associati al tasso dell'interesse r devono soddisfare le condizioni (4.9)-(4.11) discusse nel paragrafo 4.4. Ovvero, i prezzi e il salario: i) sono espressi in termini di merce 1; ii) non comportano profitti strettamente positivi per le tecniche appartenenti all'insieme Θ; iii) comportano profitti nulli per le tecniche appartenenti a $\theta(r)$.

---

di *switch*. Per cui, in generale, solo due tecniche sono ottimali in un punto di *switch*, ed esse differiscono per un solo metodo di produzione (vedi Pasinetti 1989, pp. 209-211).

[14] Nel sistema (14.17) - (14.21) appaiono come incognite anche le quantità prodotte con le tecniche ottimali Q_θ, $\forall\theta \in \theta(r)$. Così, quando la corrispondenza $\theta(r)$ è *single-valued*, il sistema ha $2N + 3$ equazioni e $2N + 2$ incognite. Tuttavia, come è noto, per la legge di Walras solo $2N + 2$ condizioni di equilibrio sono tra loro indipendenti. Nei punti di *switch*, invece, le quantità prodotte con ciascuna delle due tecniche risultano indeterminate in conseguenza del fatto che esse consistono, in generale, degli stessi metodi di produzione in tutti i settori tranne uno (Pasinetti 1989, pp. 210-211). Tuttavia, una volta determinato il sistema dei prezzi di equilibrio e quindi la domanda di beni di consumo, conoscendo i metodi in uso e la disponibilità di lavoro, possiamo ricavare le quantità complessivamente prodotte.

Dopo aver scritto le condizioni (4.17)-(4.21), possiamo studiare alcune proprietà degli equilibri focalizzando l'attenzione sul mercato dei titoli. In particolare, come spiegheremo tra poco, utilizzando le condizioni (4.18), (4.20) e (4.21), ed escludendo la possibilità della produzione netta di beni capitale, possiamo arrivare ad esprimere la domanda di titoli da parte dei giovani e l'offerta di essi da parte delle imprese in funzione del tasso dell'interesse. Ciò ci consentirà di individuare i livelli del tasso dell'interesse che portano domanda e offerta in equilibrio[15].

4.6.1 L'offerta di titoli

Dato che la corrispondenza $\theta(r)$ è quasi ovunque *single-valued*, tranne che nei punti di *switch*, possiamo tenere questi da parte e trattarla come una funzione $\theta = \theta(r)$ definita sul dominio $[0, R]$ esclusi i punti di *switch*. Completeremo successivamente l'analisi discutendo nello specifico cosa succede in questi ultimi.

Per ogni tecnica $\theta \in \Theta$, è possibile determinare il vettore delle produzioni lorde Q_θ, il vettore dei beni capitale impiegati X_θ e la produzione netta di merce 1 Y_θ supponendo: i) che θ sia la tecnica in uso; ii) il pieno impiego del lavoro; e iii) l'uguaglianza tra produzione e impiego di beni capitale – ovvero l'assenza di accumulazione netta. Tali ipotesi, infatti, ci permettono di scrivere il seguente sistema:

$$Q_\theta^T \cdot L(\theta) = \bar{L} \tag{4.22}$$

$$Q_\theta^T \cdot A(\theta) = X_\theta^T \tag{4.23}$$

$$Q_\theta = e_1 \cdot Y_\theta + X_\theta \tag{4.24}$$

In particolare, indichiamo con $Q_\theta = Q(\theta)$, $X_\theta = X(\theta)$ e $Y_\theta = Y(\theta)$ la soluzione del sistema (4.22) - (4.24)[16].

[15] Da notare che se: i) è in uso la tecnica ottimale; ii) c'è produzione netta solo di merce 1; iii) il lavoro disponibile è pienamente impiegato, allora l'equilibrio sul mercato dei titoli implica l'equilibrio anche tra la produzione netta e la domanda di merce 1 per il consumo – e quindi tra domanda e offerta di tutte le merci.

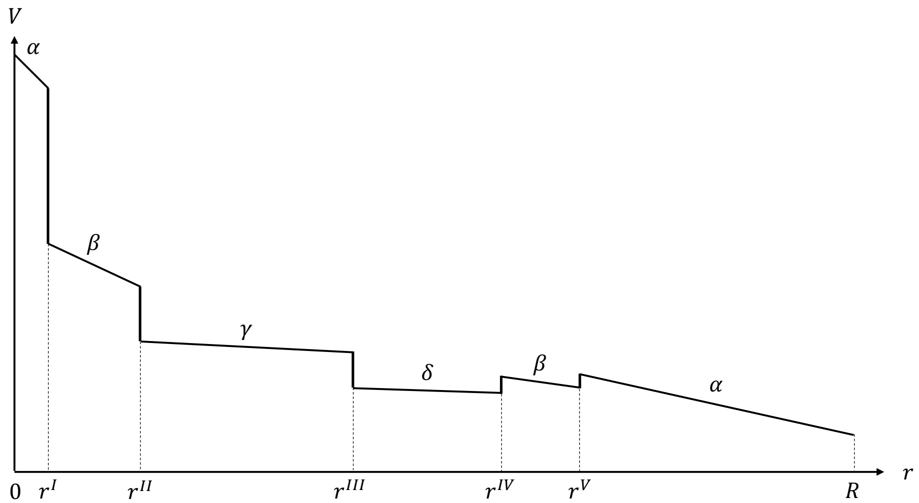
[16] Facendo gli opportuni calcoli, si vede che:
$Y(\theta) \equiv \bar{L}/e_1^T \cdot [I - A(\theta)]^{-1} \cdot L(\theta)$; $Q(\theta) \equiv \{e_1^T \cdot [I - A(\theta)]^{-1}\} \cdot \bar{L}/e_1^T \cdot [I - A(\theta)]^{-1} \cdot L(\theta); (\theta) \{e_1^T \cdot [I - A(\theta)]^{-1} \cdot A(\theta)\} \cdot \bar{L}/e_1^T \cdot [I - A(\theta)]^{-1} \cdot L(\theta)$.

Una volta determinato $X_\theta = X(\theta)$, sul dominio della funzione $\theta = \theta(r)$ possiamo esprimere il valore dei beni capitale impiegati come una funzione del tasso dell'interesse, ovvero $K(r) \equiv X[\theta(r)]^T \cdot p(r)$. Così, aggiungendo i salari sul lavoro impiegato, definiamo l'offerta di titoli come funzione del tasso dell'interesse:

$$V(r) \equiv K(r) + \bar{L} \cdot w(r) \equiv X[\theta(r)]^T \cdot p(r) + \bar{L} \cdot w(r) \tag{4.25}$$

Per completare l'analisi rimane da prendere in considerazione il caso dei punti di *switch*. Supponiamo che $\hat{r} \in [0, R]$ sia un punto di *switch* tra le tecniche θ' e θ'', ovvero $\theta(\hat{r}) \equiv \{\theta', \theta''\}$. Ciò significa che, al sistema dei prezzi $[p(\hat{r}), w(\hat{r}), \hat{r}]$, i produttori sono indifferenti tra l'utilizzo di θ' e quello di θ''. Quindi, la quantità di lavoro disponibile $\bar{L}$ potrà essere impiegata o tutta con la tecnica θ', o tutta con θ'', oppure divisa in qualunque modo tra le due. Così, supponendo che $X(\theta')^T \cdot p(\hat{r}) < X(\theta'')^T \cdot p(\hat{r})$, al tasso $\hat{r}$, il valore dei beni capitale impiegati può assumere qualsiasi valore tra questi estremi, ovvero: $K(\hat{r}) \in [X(\theta')^T \cdot p(\hat{r}), X(\theta'')^T \cdot p(\hat{r})]$. Di conseguenza, al tasso $\hat{r}$, anche l'offerta di titoli $V(\hat{r})$ può assumere qualsiasi valore nell'intervallo chiuso $[X(\theta')^T \cdot p(\hat{r}) + \bar{L} \cdot w(\hat{r}), X(\theta'')^T \cdot p(\hat{r}) + \bar{L} \cdot w(\hat{r})]$.

Figura 4.1
Offerta di titoli



Mettendo insieme le due parti del ragionamento, possiamo disegnare una curva che rappresenti l'offerta di titoli da parte delle imprese al variare del tasso dell'interesse r nell'intervallo $[0, R]$. In particolare, la curva di offerta di titoli avrà una forma che risente delle proprietà di $K(r)$ e $w(r)$. Per quanto riguarda $w(r)$, come già detto, si tratta di una funzione dall'andamento monotono decrescente. Invece, il valore dei beni capitale impiegati $K(r)$ ha un andamento a gradini, con tratti verticali in corrispondenza dei punti di *switch*. Tali gradini possono scendere o salire a seconda che il punto di *switch* sia di tipo *forward* o *backward*[17]. Di conseguenza, anche l'offerta di titoli $V(r)$ avrà un andamento a gradini. Così, per l'esempio con quattro tecniche che abbiamo introdotto nel paragrafo 4.5, ci possiamo attendere una curva $V(r)$ come quella rappresentata nella figura 2.

Nella figura 4.2, i gradini in corrispondenza dei punti di *switch* r^I, r^{II} e r^{III} scendono verso il basso poiché si tratta di punti di *forward switch*. Al contrario, nei punti r^{IV} e r^V, che sono di *backward switch*, i gradini salgono verso l'alto.

4.6.2 La domanda di titoli

Come abbiamo visto nel paragrafo 4.3, la domanda di titoli scaturisce dalle decisioni di risparmio dei giovani. Così, tramite l'equazione (4.5), abbiamo definito la domanda di titoli – ovvero il risparmio dei giovani, in funzione del sistema dei prezzi, cioè $S = S(p, w, r)$. Ora, supponendo che siano soddisfatte le condizioni (4.20) e (4.21), possiamo esprimere la domanda di titoli in funzione del tasso dell'interesse:

$$S(r) \equiv \bar{L} \cdot \{w(r) - c_g[p(r), w(r), r]\} \tag{4.27}$$

Come la curva di offerta, anche la curva di domanda di titoli può avere un andamento non monotono. Possiamo, ad esempio, assumere che le preferenze deli individui siano tali che il rapporto tra il consumo di merce 1 da giovani e da vecchi c_g/c_v diminuisca al crescere del tasso

[17] Nel punto di switch $\hat{r} \in [0, R]$, le tecniche θ' e θ'' comportano entrambe profitti nulli ai prezzi $[p(\hat{r}), w(\hat{r}), \hat{r}]$. Ovvero $Y(\theta') - \hat{r} \cdot [X(\theta')^T \cdot p(\hat{r}) + \bar{L} \cdot w(\hat{r})] = 0$ e $Y(\theta'') - \hat{r} \cdot [X(\theta'')^T \cdot p(\hat{r}) + \bar{L} \cdot w(\hat{r})] = 0$. Pertanto, $X(\theta')^T \cdot p(\hat{r}) < X(\theta'')^T \cdot p(\hat{r})$ se e solo se $Y(\theta') < Y(\theta'')$, con l'impiego di lavoro posto pari a $\bar{L}$.

dell'interesse. Infatti, come detto[18], $(1 + r)$ può essere anche interpretato come il prezzo relativo del consumo presente in termini del consumo futuro; così, per l'effetto di sostituzione, possiamo attenderci che il rapporto c_g/c_v si muova in direzione opposta ad esso. Ciò comporta una tendenza dei risparmi dei giovani a crescere quando r aumenta. D'altra parte, però, visto che $w(r)$ è una funzione monotona decrescente, l'incremento di r fa diminuire il reddito da cui attingono i risparmi. In particolare, siccome $w(r) \to 0$ quando $r \to R$, la curva ha sicuramente un tratto finale decrescente. Possiamo quindi supporre che, sotto le ipotesi qui illustrate, la curva di domanda di titoli abbia una forma a campana: prima crescente e poi decrescente.

4.6.3 L'equilibrio

Avendo ottenuto la corrispondenza $V(r)$ e la funzione $S(r)$, possiamo cercare quei livelli del tasso dell'interesse per i quali l'offerta e la domanda di titoli sono uguali. In particolare, un tasso dell'interesse r^*, con $V(r^*)$ *single-valued*, è un equilibrio sul mercato dei titoli se e solo se $S(r^*) = V(r^*)$. Se invece $V(r^*)$ è *set-valued*, allora r^* è un equilibrio se e solo se $S(r^*) \in V(r^*)$.

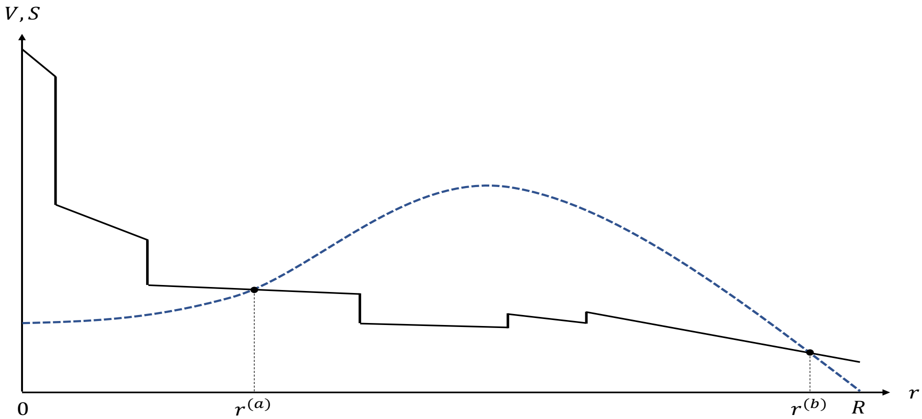
Visto che qui non stiamo semplicemente cercando degli equilibri, ma degli equilibri stazionari, il teorema di Arrow e Debreu non si applica e, pertanto, l'esistenza di equilibri dipende dai dati del modello, ovvero: le preferenze individuali, le condizioni tecniche di produzione e la disponibilità di lavoro[19]. Inoltre, se il modello che stiamo considerando ammette degli equilibri, questi, in generale, per via dell'andamento non monotono delle curve di domanda e offerta di titoli, saranno equilibri multipli.

---

[18] Vedi nota 4.

[19] Per fare un semplice esempio, le preferenze degli individui e le condizioni tecniche di produzione potrebbero essere tali che per nessun livello del tasso dell'interesse si genera mai un ammontare di risparmi che consenta la ripetizione dei processi produttivi su scala immutata. In questo caso, equilibri stazionari sono impossibili.

Figura 4.3
Gli equilibri sul mercato dei titoli



In particolare, nella figura 4.3 abbiamo sovrapposto il grafico della corrispondenza $V(r)$, già mostrato nella figura 4.2, con una curva a campana che rappresenta l'andamento della domanda di titoli da parte dei risparmiatori. In questo caso emergono due equilibri, ai tassi dell'interesse $r^{(a)}$ e $r^{(b)}$.

La molteplicità degli equilibri non è un fenomeno sorprendente o inusuale nei modelli neo-walrasiani. Tuttavia, il nostro esempio pone in luce una specifica implicazione del verificarsi del *re-switching* – e, più precisamente, l'emergere di punti di *backward switch* – sulle proprietà degli equilibri. Si noti infatti che, nell'esempio, al tasso dell'interesse $r^{(a)}$ la tecnica γ è quella ottimale, ovvero: $\theta\left(r^{(a)}\right) = \gamma$. Invece, al tasso $r^{(b)}$ si ha $\theta\left(r^{(b)}\right) = \alpha$. Così, visto che $y(\alpha) > y(\gamma)$[20], abbiamo che l'equilibrio al tasso dell'interesse più alto comporta l'ottenimento di un maggiore prodotto netto per unità di lavoro Y/L. In altri termini, il *reverse capital deepening*, che può affliggere la scelta delle tecniche, nel caso di equilibri multipli può emergere anche come fenomeno di equilibrio.

Da notare che, per l'andamento monotono decrescente della funzione $w(r)$, $r^{(b)} > r^{(a)}$ implica $w(r^{(a)}) > w(r^{(b)})$. Pertanto, l'equilibrio col saggio del salario più alto è associato al minor prodotto netto per

[20] Si veda la figura 4.1.

unità di lavoro, ovvero al maggior impiego di lavoro per unità di prodotto netto.

Infine, non si discuteranno qui le proprietà di stabilità degli equilibri stazionari. Ciò, infatti, richiederebbe una specifica definizione dei processi dinamici rispetto ai quali valutare la convergenza o meno delle traiettorie che si generano da una posizione iniziale arbitraria[21]. Invece, l'analisi qui proposta si basa esclusivamente sulle ipotesi della stazionarietà e della ricorsività.

4.7 Conclusioni

In una serie di articoli pubblicati tra il 2000 e il 2011[22], Garegnani ha sostenuto che i fenomeni del *re-switching* e del *reverse capital deepening* possono manifestarsi anche nei modelli di equilibrio neo-walrasiani, con implicazioni sulle proprietà degli equilibri, soprattutto per quanto attiene la molteplicità e la stabilità. In questo scritto abbiamo cercato di esplorare la validità della tesi di Garegnani facendo riferimento a una speciale categoria di modelli neo-walrasiani[23]: i modelli di equilibrio stazionario con generazioni sovrapposte.

Nello specifico, diversamente dall'usuale trattazione dei modelli di equilibrio stazionario con generazioni sovrapposte, abbiamo ipotizzato la presenza di beni capitale eterogenei. Ciò comporta, come abbiamo visto nel paragrafo 4.5, la possibilità del verificarsi, anche in un contesto neo-walrasiano, dei fenomeni del *re-switching* e del *reverse capital deepening*.

Da un lato, visto che la molteplicità degli equilibri stazionari è piuttosto usuale nei modelli con generazioni sovrapposte, non sembra agevole poter individuare una specifica responsabilità da attribuire ai fenomeni sopra citati. Dall'altro, come abbiamo visto nel paragrafo 6, essi determinano caratteristiche degli equilibri che non potrebbero aversi in loro assenza. In particolare, vi è la possibilità che il fenomeno del

---

[21] Tentativi di analisi della stabilità in modelli simili a quello qui discusso sono proposti in Fratini (2007) e (2013).

[22] Si veda Garegnani (2000), (2003), (2005a), (2005b), (2011).

[23] Garegnani ha portato avanti la sua analisi facendo riferimento quasi esclusivamente a modelli di equilibrio Arrow-Debreu. Per una ricostruzione dettagliata degli argomenti critici di Garegnani, si veda Fratini (2019).

reverse capital deepeneing emerga come fenomeno di equilibrio. Ovvero, nel caso di equilibri multipli, è possibile che un tasso dell'interesse di equilibrio più elevato sia associato all'uso di una tecnica a minore intensità di lavoro, cioè con un più alto prodotto netto per unità di lavoro. Tale circostanza rappresenta il principale risultato originale di questo scritto.

L'emergere del *reverse capital deepeneing* come fenomeno di equilibrio in un modello neo-walrasiano pone in discussione non solo il ruolo del tasso dell'interesse nell'orientare le decisioni dei produttori, ma più in generale quello delle variabili distributive. Infatti, siccome il tasso dell'interesse e il saggio del salario si muovono in direzioni opposte, possiamo riformulare il nostro risultato dicendo che, nel caso di equilibri multipli, è possibile che l'equilibrio al saggio del salario più basso comporti l'uso di una tecnica a minore intensità di lavoro.

Bibliografia

Bloise, G. e Reichlin, P. (2009). An obtrusive remark on capital and comparative statics. *Metroeconomica*, 60(1), 54-76.

Diamond, P.A. (1965). National debt in a neoclassical growth model. *American Economic Review*, 55(5), 1126-1150.

Fratini, S.M. (2007). Reswitching of techniques in an intertemporal equilibrium model with overlapping generations. *Contributions to Political Economy*, 26(1), 43-59.

Fratini, S.M. (2013). Real Wicksell effect, demand for capital and stability. *Metroeconomica*, 64(2), 346-360.

Fratini, S.M. (2019). On the second stage of the Cambridge capital controversy. *Journal of Economic Surveys*, 33(4), 1073-1093.

Garegnani, P. (2000). Savings, investment and the quantity of capital in a system of general intertemporal equilibrium. In H.D. Kurz (ed.), *Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics* (pp. 392-445). Cambridge: Cambridge University Press.

Garegnani, P. (2003). Savings, investment and capital in a system of general intertemporal equilibrium. In F.H. Hahn and F. Petri (eds), *General Equilibrium. Problems and Prospects*, 117-172. London: Routledge.

Garegnani, P. (2005a). Capital and intertemporal equilibria: a reply to Mandler. *Metroeconomica*, 56(4), 411-437.

Garegnani, P. (2005b). Further on capital and intertemporal equilibria: a rejoinder to Mandler. *Metroeconomica*, 56(4), 495-502.

Garegnani, P. (2011). Savings, investment and capital in a system of general intertemporal equilibrium. In R. Ciccone, C. Gehrke and G. Mongiovi (eds), *Sraffa and Modern Economics* (pp. 13-74). London: Routledge.

Geanakoplos, J. (1987). Overlapping Generations Model of General Equilibrium. In J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman (eds.) *The New Palgrave. A Dictionary of Economics*, vol. 3. London: Macmillan.

Kurz, H.D. e Salvadori, N. (1995). *Theory of Production. A Long-Period Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Levhari, D. (1965). A nonsubstitution theorem and switching of techniques. *The Quarterly Journal of Economics*, *79*(1), 98-105.

Pasinetti, L.L. (1989). *Lezioni di Teoria della Produzione*, terza edizione. Bologna: Il Mulino.

Petri (2021) *Microeconomics for the Critical Mind. Mainstream and Heterodox Analyses*, vol. 1. Cham Switzerland: Springer.

Petri, F. (2022). General equilibrium and the neo-Ricardian critique: On Bloise and Reichlin. *Metroeconomica*, 73(4), 1021-1047.

Robinson, J.V. e Naqvi, K.A. (1967). The badly behaved production function. *Quarterly Journal of Economics*, 81(4), 579-591.

Salvadori, N. (1987). Non-substitution theorems. In J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman (eds) *The New Palgrave. A Dictionary of Economics*, vol. 3. London: Macmillan.

Samuelson, P.A. (1958). An exact consumption loan model of interest, with or without the social contrivance of money. *Journal of Political Economy*, 66(6), 467-482.